

УДК 532.59

**ЕВОЛЮЦІЯ І АСИМЕТРІЯ НЕСТІЙКИХ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ
В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ****Ю.В.Гуртовий.**

Стаття присвячена проблемі поширення слабконелінійних хвильових пакетів на межі розділу двох рідких шарів з різною густиною. Виявлено і чисельно досліджено умову модуляційної стійкості слабконелінійного хвильового пакету. Встановлено, що у разі модуляційної нестійкості слабконелінійний хвильовий пакет еволюціонує в послідовність солітонів обвідної, розміри і число яких залежать від початкових умов. Врахування другого наближення для відхилення межі розділу двох рідких шарів приводить до виникнення асиметрії хвильового пакету.

The thesis is devoted to the problem of propagation of weakly nonlinear wave packets at the interface of two layers with different density. The solution and nonlinear evolutionary Schrödinger equation are obtained using the method of multiple scales. Condition of modulation instability is found and numerically investigated. Geometrical and physical parameters of two fluid systems in which unstable solution leads to creation of envelope solitons are investigated. Areas where the second-harmonic resonance of internal wave packets appears that leads to the asymmetry of wave packets are found.

Вступ. Розглядається поширення періодичних хвильових пакетів в гідродинамічній системі «шар-шар». Верхня і нижня рідини є ідеальними, нестисливими. Хвильові рухи є потенціальними, і характеризуються малою, але скінченою амплітудою (рис. 1).

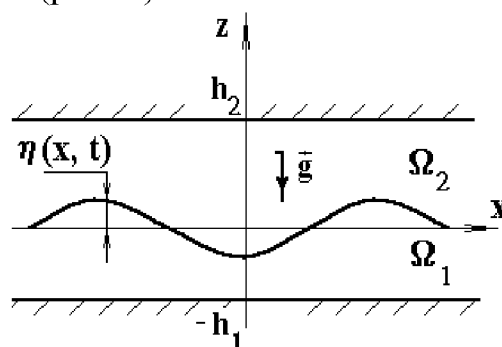


Рис. 1 Постановка задачі

Незважаючи на інтенсивність вивчення, дана проблема вирішена далеко не повністю. У багатьох роботах виведені і досліджені еволюційні рівняння типу рівняння Кортевега-де Вріза, зокрема в [1-2], проте діапазон частот, в якому вони придатні, недостатньо широкий, оскільки довжини можуть бути не тільки великими, але і малими або порівнянними з параметрами рідини. У роботі [3] розглядається поширення і стійкість хвильових пакетів в системі „шар-напівпростір”. В цій статті досліджується проблема стійкості в системі „шар-шар” і аналізується еволюція і форма обвідної хвильового пакета залежно від відношень товщин та густин двох рідких середовищ.

Постановка задачі. Математична модель задачі про поширення хвильових пакетів уздовж поверхні контакту двох рідких шарів $\Omega_1 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, -h_1 < z < 0\}$ і $\Omega_2 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, 0 < z < h_2\}$ у безрозмірному вигляді визначається системою рівнянь:

$$\nabla^2 \varphi_j \equiv \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega_j (j=1,2) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{при } z = \alpha \eta(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1-\rho)\eta + \frac{1}{2}\alpha[(\vec{\nabla}\varphi_1)^2 - (\vec{\nabla}\varphi_2)^2] - T \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = \alpha \eta(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2,$$

де $\alpha = a/L$ - коефіцієнт нелінійності, φ_i ($i = 1, 2$) - потенціали швидкостей в рідких середовищах, η - відхилення поверхні контакту, $\rho = \rho_2 / \rho_1$ - відношення густин.

Аналіз модуляційної стійкості. На основі розв'язку, отриманого методом багатомасштабних розвинень [4] до третього порядку, отримано нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) для обвідної хвильового пакету в системі „шар-шар”

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5\omega'' A_{,xx} = -ik\omega^{-1}\alpha^2 (\text{cth} kh_1 + \rho \text{cth} kh_2)^{-1} I A^2 \bar{A}, \quad (1)$$

де

$$I = \Lambda \omega^2 \left[3 \text{cth}^2 kh_1 - 1 - \rho (3 \text{cth}^2 kh_2 - 1) \right] + 2k\omega^2 \left[2 \text{cth} kh_1 - \text{cth}^3 kh_1 + \rho (2 \text{cth} kh_2 - \text{cth}^3 kh_2) \right] - 1.5Tk^4 - \omega^4 (1-\rho)^{-1} \left[1 - \text{cth}^2 kh_1 - \rho (1 - \text{cth}^2 kh_2) \right]^2.$$

Після переходу до системи, яка рухається з груповою швидкістю, а також після нормування НРШ можна подати в канонічному вигляді

$$q_{,t} = iq_{xx} + 2isq^2 \bar{q},$$

де $s = \text{sign}(I_0 \omega'')$, $I_0 = -k(\text{cth} kh_1 + \text{cth} kh_2)I$.

В якості одного із розв'язків НРШ (1) містить незалежний від x розв'язок $A = a \exp(i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} I_0 t)$, але це розв'язок нестійкий, коли $I_0 \omega'' > 0$. Модуляційна нестійкість (нестійкість Бенджаміна - Фейра) [5] широко поширена у фізиці (нелінійна оптика, хвилі в плазмі). При даній нестійкості рівняння Шредінгера має розв'язок у вигляді солітонов обвідної або групових солітонов [6]. При хвилюванні нелінійність і дисперсія протидіють один одному і обвідної пакету хвиль модулюється до утворення солітонов, після чого відбувається баланс нелінійності і дисперсії. Обвідна такого солітона описується гіперболічним секансом

$$A(x, t) = 2i\delta \sqrt{\frac{\omega\omega''}{\alpha^2 I_0}} \frac{\exp(-2i\vartheta(x - \omega't) - 4i(\vartheta^2 - \delta^2)t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} \quad (2)$$

Знайдені криві, які визначають межі областей модуляційної стійкості і нестійкості, які визначаються співвідношеннями $I_0\omega'' = 0$, $I_0\omega'' \rightarrow \infty$.

На рис.2 побудовані криві, що визначаються рівняннями

$I_0\omega'' = 0$ (криві з індексами "2"- "4") та

$I_0\omega'' \rightarrow \infty$ (криві з індексами "1", "5", "6").

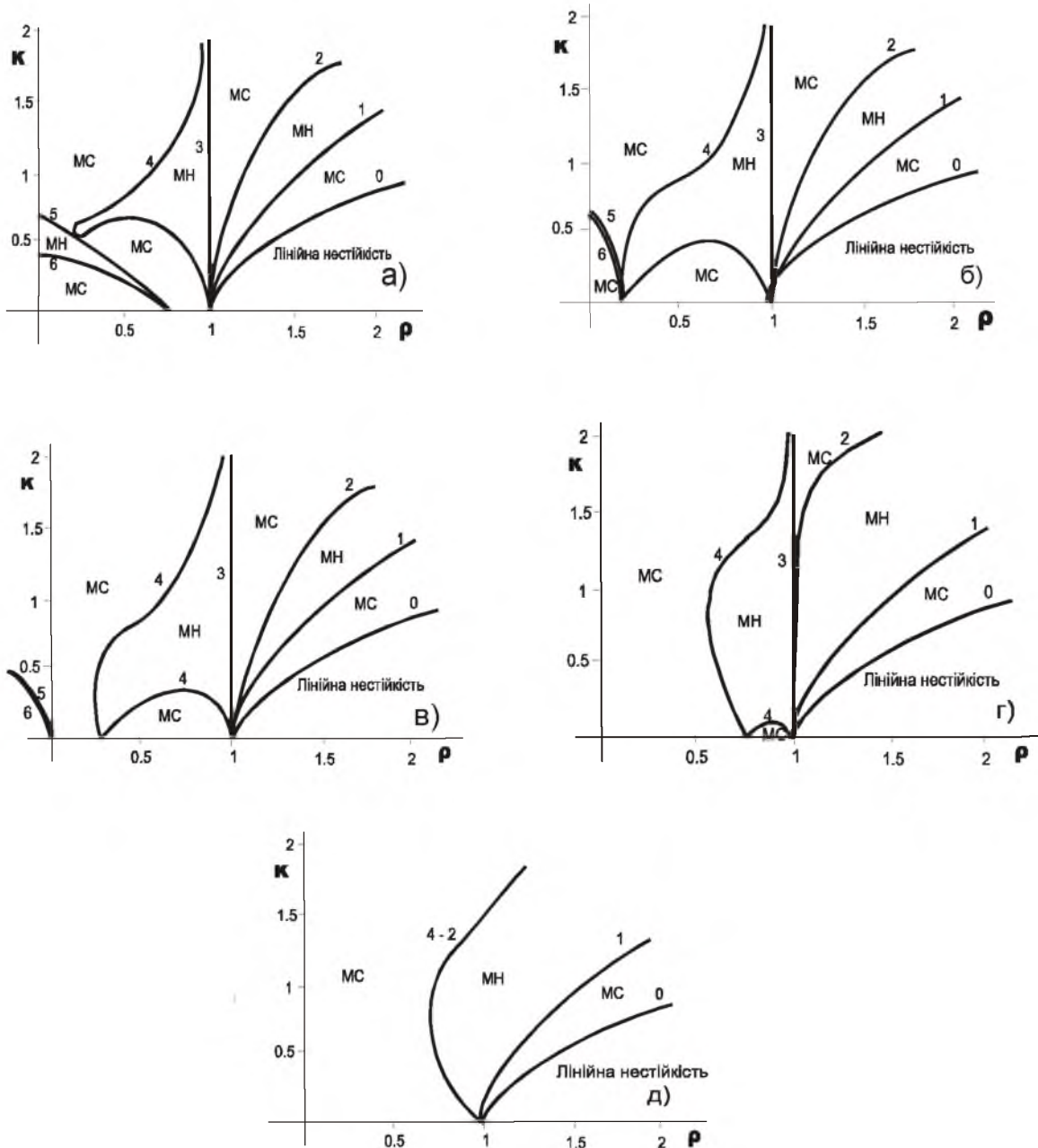


Рис. 2. Діаграми стійкості при $h_2=1$ і при товщині нижнього шару

а) $h_1 = 10$, б) $h_1 = 2.23$, в) $h_1 = 1.73$, г) $h_1 = 1.1$, д) $h_1 = 1$

Графіки цих кривих були побудовані в системі координат (ρ, k) на основі чисельного розв'язку приведених вище рівностей. Дані криві визначають межі областей нелінійної модуляційної стійкості та нестійкості при різних значеннях параметру $h_1 \in \{10; 2.23; 1.73; 1.1; 1\}$ та фіксованому значенні $h_2 = 1$. Область лінійної нестійкості відділена кривою з індексом „0”. Области модуляційної стійкості (МС) і модуляційної нестійкості (МН) чергуються.

При $h_1 = 10$ виявлено шість кривих, що розділяють область нелінійної стійкості та нестійкості. В даному випадку при $\rho < 1$ маємо дві області стійкості як для гравітаційних так і для капілярних хвиль (рис.2а).

При зменшенні h_1 до значення 2.23 криві „5” і „6” майже співпадають, а гострий кінець кривої „4” знижується на вісь ρ (рис.2б). При $h_1 = 1.73$ число кривих, що потрапляють у перший квадрант площини (ρ, k) , зменшується (криві „5” і „6” зміщуються вліво), а гострий кінець кривої „4” поступово рухається вправо по вісі ρ (рис.2в). Це, в свою чергу, приводить до збільшення області модуляційної стійкості, що обмежена координатними вісями.

Процес звуження областей нестійкості добре видно при (рис. 2г). В граничному випадку, коли товщини шарів рівні, тобто при $h_1 = 1$, нижня дуга кривої «4» вироджується в точку $(1,0)$. Вертикальна пряма $\rho = 1$ в граничному випадку відсутня, оскільки на неї накладається нижня частина кривої «2» і верхня частина кривої «4», при цьому ті частини цих кривих, що залишились, утворюють нову межу розділу областей модуляційної стійкості і модуляційної нестійкості (рис. 2д). Слід відмітити значне спрощення дисперсійної діаграми при однаковій товщині шарів. Крім того, розгляд фізично важливої вузької ділянки біля прямої $\rho = 1$ вказує на те, що модуляційна нестійкість майже повністю покриває її. Таким чином, хвильові пакети внутрішніх хвиль є нестійкими для широкого спектру хвильових чисел в умовах, коли відношення густин двох шарів є близьким до одиниці.

Еволюція форми обвідної. У разі модуляційної нестійкості дослідження еволюції форми слабо нелінійного хвильового пакету внутрішніх хвиль в дисперсійному середовищі приводить до утворення солітонів обвідної, розміри і число яких залежать від початкових параметрів хвильового пакету. Солітони обвідної є кінцевим утворенням еволюції скінченного хвильового пакету і є стійкими щодо взаємодій з іншими хвильовими пакетами.

Якщо ж на початку маємо неперервний хвильовий пакет, то процес утворення солітонов не є остаточним, і форма хвильового пакету періодично еволюціонує до початкової форми (повернення ФПУ).

Параметри солітона $\delta, \vartheta, x_0, \varphi_0$ визначаються початковими умовами $A(x, 0)$. Швидкість поширення солітона обвідної не залежить від амплітуди.

Якщо підставити (2) у вираз для двох складових розв'язків відхилення поверхні контакту рідких середовищ, то розклад $\eta(x,t)$ в другому наближенні має вигляд

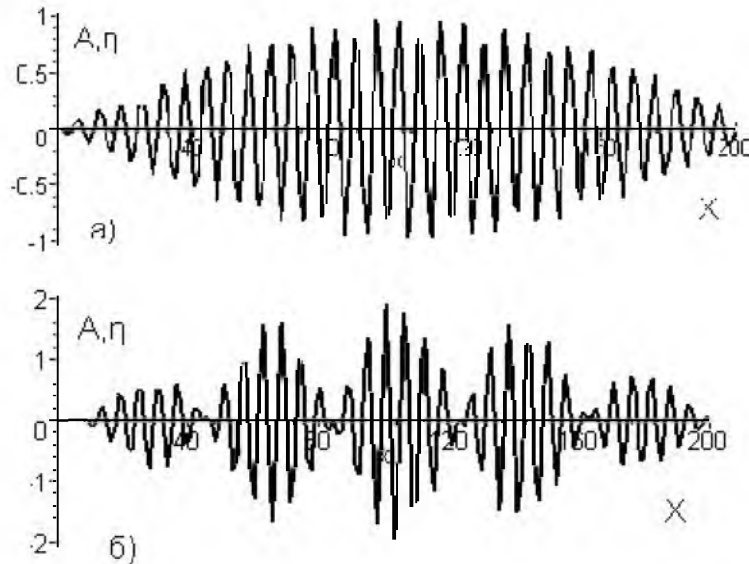


Рис. 3 Еволюція нестійкого хвильового пакету
а) початковий стан, б) кінцевий стан

$$\eta(x,t) = \delta \sqrt{\frac{\omega \omega''}{\alpha^2 I_0}} \frac{\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} + \frac{\delta^2 \omega \omega''}{\alpha I_0 \operatorname{ch}^2 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} \times$$

$$\times \left[\frac{\omega^2 (1 - \operatorname{cth}^2 kh_1 - \rho(1 - \operatorname{cth}^2 kh_2))}{1 - \rho} + 0.5\Lambda \cos 2(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \right] + O(\alpha^3), \quad (3)$$

де $\bar{k} = k - 2\vartheta$, $\bar{\omega} = \omega - 2\vartheta\omega' + 4(\vartheta^2 - \delta^2)$.

З виразу (3) видно, що для визначення форми поверхні контакту $\eta(x,t)$ важливий знак величини, який змінюється за умови переходу через криву, уздовж якої $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) = 0$, або під час переходу через криву $L_2 = 0$, уздовж якої $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) \rightarrow \infty$. Рівняння цих кривих в неявній формі мають вигляд

$$L_1 = 0: [1.5 \operatorname{cth}^2(kh_1) - 0.5 - \rho(1.5 \operatorname{cth}^2(kh_2) - 0.5)]\omega^2 = 0$$

$$L_2 = 0: 2\omega^2(\operatorname{cth}(2kh_1) + \rho \operatorname{cth}(2kh_2)) - k(1 - \rho + 4Tk^2) = 0$$

Досліджуючи формулу (3) приходимо до висновку, що у разі модуляційної нестійкості існують такі параметри двошарової гідродинамічної системи, що вплив амплітуди другої гармоніки приводить до загострення або затуплення форм солітонів обвідної.

На рис.3 зображено два варіанти форми солітонов обвідної з урахуванням другої гармоніки для значень товщини і відношення щільності двох рідких шарів, при яких відношення амплітуд першої і другої гармоніки дорівнює 5. Коли $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$, то верхня обвідна загострюється, а нижня навпаки

затуплюється (рис. 3а). На рис.3б показаний аналогічний ефект впливу другої гармоніки на форму солітонів обвідної за умови $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) < 0$. В цьому випадку вже верхня обвідна затуплюється, а нижня стає загостреною.

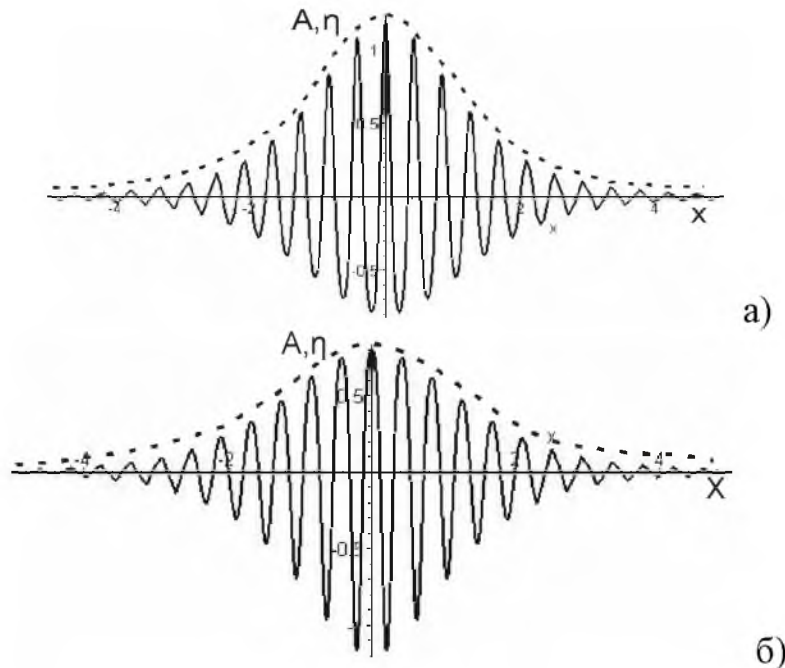


Рис.3. Форма солітона обвідної при а) $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$, б) $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) < 0$.

Висновок. Таким чином, знайдені області, де еволюція скінченного слабконелінійного хвильового пакету приводить до утворення послідовності солітонов обвідної. Врахування другого наближення для відхилення межі розділу двох рідких шарів у разі модуляційної нестійкості виявляє наявність ефекту асиметрії форми обвідної хвильового пакету.

БІБЛЮГРАФІЯ

1. Kakutani T., Jamasaki N. Solitary waves in two-layer fluid // J. Physical Soc. Japan.-1978.- Vol. 45, № 2, P. 674-679.
2. Segur H., Hammack J.L. Solitary model of long internal waves // J. Fluids Mechanics.-1982.- Vol. 118.- P. 285-304.
3. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладна гідромеханіка.- 2001.- Т.3, №.4.- С.38-46
4. Найфэ А. Методы возмущений.- М.: Мир, 1976.- 446 с.
5. Фейр Дж. Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами// В сб. Нелинейная теория распространения волн.- М.: Мир, 1970.- С.77-105.
6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ.- 1971.-61.- С.118-134.